

Société Française des Thermiciens
Demi-Journée " Application de la Thermoélectricité "
6 juin 1990.

MODELISATION DE SYSTEMES THERMOELECTRIQUES

John Stockholm
TNEE

Introduction:

Les systèmes thermoélectriques sont des pompes à chaleur statiques qui transfèrent de la chaleur d'un niveau de température à une autre en utilisant de l'énergie électrique.

Les systèmes thermoélectriques dont les puissances sont de l'ordre du kilowatt ou plus sont composés d'un certain nombre de cellules élémentaires que nous appelons briques. Chaque brique est constituée d'une quantité de matière thermoélectrique traversée par un courant électrique, d'un côté un échangeur qui absorbe la chaleur et de l'autre côté un autre échangeur qui rejette la chaleur.

La modélisation porte sur plusieurs niveaux, chacun peut être appelé dans le langage informatique un " objet ". Nous examinons donc les objets suivants:

- matière thermoélectrique: ses propriétés thermoélectriques
- pièce active: un ou plusieurs éléments thermoélectriques associé à une brique
- échangeurs élémentaires
 - pour les gaz (en particulier air humide)
 - pour les liquides
- brique (association d'une pièce active et de 2 échangeurs)
- tiroir (sous ensemble) composé de N briques (par exemple 200 à 500)
- Armoire composé d'une dizaine de tiroirs.

Tous les calculs sont effectués dans le système d'unités S.I. Nous admettons d'entrer des paramètres dans des unités sous ou sur multiples mais en maintenant au dénominateur toujours les unités S.I.

1. MATIERE THERMOELECTRIQUE

Les caractéristiques des matériaux thermoélectriques dépendent du type de matériau et de sa fabrication. Il y a uniquement 3 paramètres thermoélectriques:

- résistivité électrique $\text{ohm}\cdot\text{m}$
- conductibilité thermique $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
- Coefficient Seebeck V/K

Ces paramètres sont fonction de la température. Des mesures expérimentales sont lissées et mises en équation. Nous avons adopté une température de référence de 300 K arrondi à 27°C.

Dans le cadre des systèmes thermoélectriques qui produisent du froid à température voisine de la température ambiante, (entre 180°C et -100°C) le matériau le mieux adapté aujourd' hui est le tellure de bismuth dopé. Des caractéristiques typiques en fonction de la température sont données en annexe 1.

Des valeurs rencontrées dans du matériau commercialisé sont:
 résistivité électrique: $\rho = 10 \text{ microhm} \cdot \text{m}$
 conductibilité thermique: $k = 1.5 \text{ W}/(\text{M} \cdot \text{K})$
 Coefficient Seebeck $s = 200 \text{ microV}/\text{K}$

La qualité du matériau est donnée par le coefficient de mérite Z (unité K^{-1})

Nous avons donc trois paramètres qui sont fonctions de la température.

$\rho = \rho(T^\circ\text{C}),$
 $\text{condthermTe} = k(T^\circ\text{C}),$
 $\text{SeebTe} = s(T^\circ\text{C}),$

2. PIECE ACTIVE

Nous donnons ci-dessous à la Fig. 1 une photographie de trois types de pièces actives: un module traditionnel, un thermoélément ayant une surface de $1,5 \text{ cm}^2$ et un module polarisé. Un module polarisé comporte un nombre impair de thermoéléments donc il a soit la polarité N ou la polarité P.

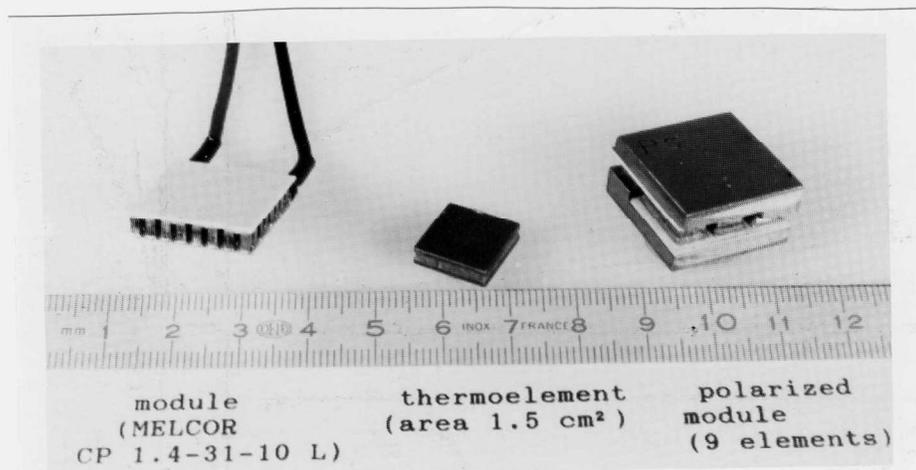


Fig. 1 Trois types de pièces actives

Lorsque dans les pièces actives il y a plusieurs éléments thermoélectriques, ceux-ci sont tous en série électriquement et en parallèle thermiquement et ils constituent ce qu'on appelle un module thermoélectrique. La technique actuelle utilise des céramiques pour tenir en place les éléments et des barrettes de liaison en cuivre qui permettent de relier électriquement les éléments en série.

Les équations qui relient les caractéristiques de la pièce active au matériau thermoélectrique sont:

$$rePA := \rho * nbTE * epTe / sTe;$$

$$SeebPA := SeebTe * nbTE;$$

$$cdtPA := condthermTe * nbTe * sTe / epTe;$$

signification des symboles:

ρ = résistivité électrique du matériau en $\text{ohm} \cdot \text{m}$

$nbTe$ = nombre de thermoéléments en série
électriquement

$epTe$ = épaisseur du thermolément (parallèle au sens du
courant électrique) en m.

sTe = surface du thermoélément (perpendiculaire au
sens du courant électrique) en m^2

$SeebTe$ = coefficient Seebeck du matériau thermoélectrique
 V/K

$rePA$ = résistance électrique de la pièce active en ohm

$SeebPA$ = coefficient Seebeck de la pièce active en V/K

$cdtPA$ = conductance thermique de la pièce active en W/K

3. ECHANGEURS

Il est intéressant de séparer les échanges thermiques en deux parties :

- conduction de la chaleur
- convection de la chaleur

3.1 Conduction de la chaleur:

La notion de résistance thermique d'une pièce est commode car elle permet de ramener des problèmes tridimensionnels à une seule dimension. Une résistance thermique n'est valable qu'entre deux surfaces isothermes, cette hypothèse est souvent admise dans nos calculs. Nous distinguons deux catégories de résistance thermique

- résistance d'interface de la pièce active
- résistance thermique de la pièce qui va de l'interface de la pièce active à la surface d'échange en convection.

3.2 Coefficient de convection de l'eau.

Les écoulements que nous considérons sont toujours de l'eau dans un tube où le nombre de Reynolds est supérieur à 5000 avec des longueurs droites qui sont inférieures à 35 diamètres. Une expérimentation a permis de vérifier que la formule de Mac Adams (convertie en unités S.I) est valable.

$$h = 1480 \cdot (1 + 0,015t) \frac{v^{0,8}}{D^{0,2}}$$

où: h = coef d' échange en convection en W/(m²*K)

t= température de l' eau en °C

v = vitesse de l' eau en m/s

D = diamètre intérieur du tube en m

3.3 Coefficient d' échange avec l' air sec

Nous avons trois types d' échangeurs que nous appelons d' après la forme des surfaces d' échange:

aillettes ondulées

aillettes à persiennes (forme perforée permettant l' évacuation des condensats)

picots

Chaque type de surface d' échange a fait l' objet d' essais thermiques. Une vingtaine d' échangeurs élémentaires dont la base fait 52*52 mm et la hauteur varie de 30 à 60mm ont été placés dans une veine d' air. La base de chaque échangeur a été chauffée électriquement. Les températures de la base, de la surface des ailettes et de l' air ont été mesurées. Le dépouillement des essais a permis d' obtenir des coefficients d' échange en fonction de la vitesse de l' air.

Nous donnons à la Fig.2 qui est à la page suivante, des coefficients d' échange avec de l' air à température ambiante ils sont de la forme:

$h = a \cdot v^b$ où a b sont des constantes et v la vitesse de l' air en m/s

échangeur à ailettes: $h = 21,0 \cdot v^{0,635}$

échangeur a picots: $h = 34,725 \cdot v^{0,700}$

Un rendement théorique d' ailette a été calculé. Les essais ont permis de constater parfois des rendements inférieurs aux valeurs théoriques, dans ce cas un coefficient multiplicateur inférieur à 1 est utilisé, parce que, parfois, certaines ailettes étaient mal brasées à la base.

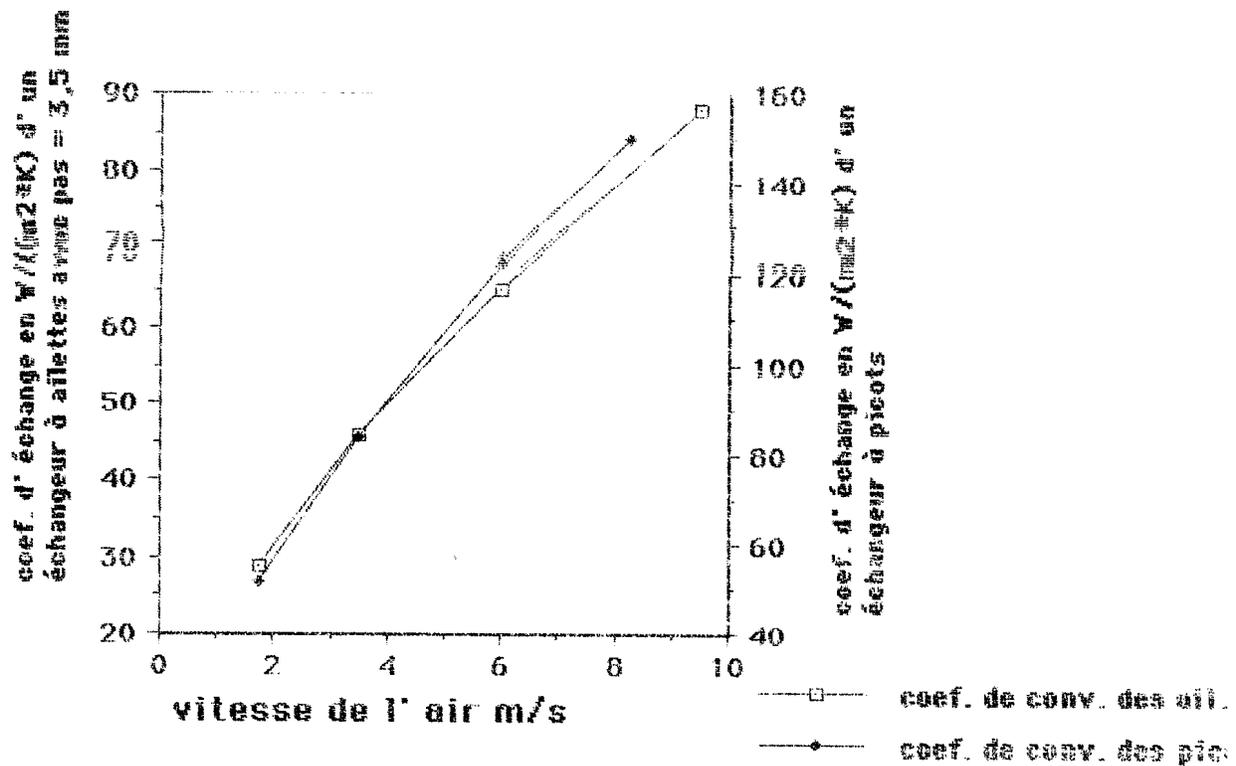


Fig 2 Coefficients de convection d' échangeurs utilisés en thermoelectricite.

3.4 Coefficient d' échange ave condensation de l' humidité de l' air.

Un modèle à été formulé par Mr Jean Buffet et récemment Mr J. L. Ridard dans son Mémoire C.N.A.M a présenté des résultats expérimentaux qui confirment ce modèle.

L' hypothèse initiale est que le Nombre de Lewis Le est égal au groupement de Lewis $Le_{gr} = 1$, ainsi on peut écrire:

$$h_i = h_f / C_p$$

où: h_i = coef. de transfert de masse $kg/(s \cdot m^2)$

h_f = coef. d' échange de chaleur sensible $W/(m^2 \cdot K)$

C_p = chaleur massique : $J/(kg \cdot K)$

h_f a été obtenu expérimentalement donc h_i est obtenu par la relation ci-dessus.

Nous donnons en annexe 2, le mécanisme physique qui permet de calculer les caractéristiques de l' air à la sortie de la brique.

4. LA BRIQUE

Une photographie Fig.3 montre en façade deux briques du type air-air

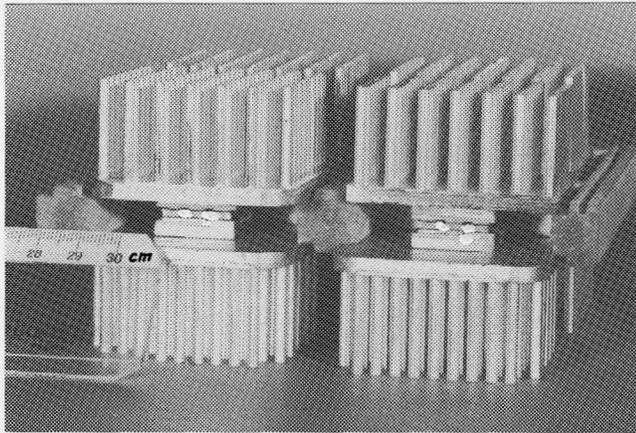


Fig.3 Photographie de deux briques en façade du type air-air.

Une brique air-eau est schématisée à la figure 4, voir page suivante. Nous examinons successivement, les équations de la thermoélectricité relatives à une pièce active, puis nous examinerons un système de 6 équations à 6 inconnues qui permet de calculer les températures et flux thermiques à travers la brique.

4.1 Equations de la thermoélectricité

Il s'agit du cas simple où l'on examine l'équilibre thermique de part et d'autre d'un morceau de matière thermoélectrique parcouru par un courant électrique.

Les équations relatives au morceau de matière ci-dessus, sont les suivantes, les notations sont données ci-après, nous avons adopté la convention d'avoir les puissances frigorifiques ($p'f$) négatives.

$$p'c = s \cdot I(t'_{pc} + 273,15) + \frac{RI^2}{2} - C(t'_{pc} - t'_{pf})$$

$$p'f = -s \cdot I(t'_{pf} + 273,15) + \frac{RI^2}{2} + C(t'_{pc} - t'_{pf})$$

Une troisième équation en résulte: $p'e = p'c + p'f$

indices: p signifie interface de la matière thermoélectrique

c signifie chaud

f signifie froid

e signifie électrique

p' = puissance thermique avec un indice c ou f

s = Coefficient Seebeck en V/K

t' = températures de surface d' un solide en °C avec ou sans indice p et avec c ou f

R résistance électrique du matériau thermoelectrique en ohm

I intensité électrique à travers le matériau en A

C conductance thermique à travers le matériau thermoélectrique en W/K

La puissance développée du côté chaud est égale à la somme de 2 termes, l' effet Seebeck, l' effet Joule, diminuée des " fuites " par conduction thermique dans le thermoélément. On admet qu' une moitié de la puissance joule est appliquée à la face chaude et l' autre moitié à la face froide. La deuxième équation donne la puissance de froid (avec la convention que $p_f < 0$).

Pour les valeurs des puissances disponibles de froid et de chaud, il faut faire apparaître la chaleur dégagée par l' effet joule dans les bases des échangeurs et la fuite thermique par le joint entre les bases d' où les 2 équations données au paragraphe suivant.

4.2 Cas pratique: système à 6 équations.

Dans ce cas pour tenir compte des pertes par les joints, les 2 équations initiales s' écrivent

$$p_f = -s^* I (t'_{pf} + 273,15) + \frac{1}{2} R_{ef} I^2 + C(t'_{pc} - t'_{pf}) + CJ(t'_{bc} - t'_{bf}) \quad (1)$$

$$p_c = s^* I (t'_{pc} + 273,15) + \frac{1}{2} R_{ec} I^2 - C(t'_{pc} - t'_{pf}) - CJ(t'_{bc} - t'_{bf}) \quad (2)$$

R_{ef} = résistance électrique froide = $R/2$ + Résist. Elect. du circuit côté froid

R_{ec} = résistance électrique chaude = $R/2$ + Résist. Elect. du circuit côté chaud

CJ = conductance thermique du joint W/K

t'_b = température de la base de l' échangeur avec indice c ou f

L' intensité I étant une donnée nous avons 6 inconnues dans les équations (1) et (2), qui sont: p_f , p_c , t'_{pf} , t'_{pc} , t'_{bf} , t'_{bc}

Les 2 relations (3) et (4) ci-dessous donnent différentes estimations de p_f et p_c :

$$p_f = \frac{t'_{bf} - t_f}{HF^* \text{sig}.f} = \frac{t'_{pf} - t'_{bf}}{R_{tf}} = \frac{(t'_{bf} - t_f) + (t'_{pf} - t'_{bf})}{\frac{1}{HF^* \text{sig}.f} + R_{tf}} = \frac{t'_{pf} - t_f}{R_{tf}} \quad (3)$$

$$p_c = \frac{t'_{bc} - t_c}{HF^* \text{sig}.c} = \frac{t'_{pc} - t'_{bc}}{R_{tc}} = \frac{(t'_{bc} - t_c) + (t'_{pc} - t'_{bc})}{\frac{1}{HF^* \text{sig}.c} + R_{tc}} = \frac{t'_{pc} - t_c}{R_{tc}} \quad (4)$$

$\beta^* \text{sig.f}$ = coef. de conv. par rapport à la base froide * surface de la base f
= conductance thermique côté froid

$\gamma^* \text{sig.c}$ = coef. de conv. par rapport à la base chaude * surface de la base c
= conductance thermique côté froid

R_i = résistance thermique entre le matériau thermoélectrique et la base
indice f ou c

R_f = résistance thermique entre le matériau thermoélectrique et le fluide

$$RT_i = R_{ti} + 1/(H_i * \text{sig.}i)$$

indice i = f ou c

Les relations (3) et (4) permettent d'écrire ces 4 équations:

$$t'_{pf} = t_f + RT_f * p_f \quad (5)$$

$$t'_{pc} = t_c + RT_c * p_c \quad (6)$$

$$t'_{bf} = t_f + p_f / (H_f * \text{sig.f}) \quad (7)$$

$$t'_{bc} = t_c + p_c / (H_c * \text{sig.c}) \quad (8)$$

Le système d'équations (1), (2), (5), (6), (7), (8) a six inconnues : p_f , p_c , t'_{pf} , p_c , t'_{bf} , t'_{bc} . La résolution peut être, soit algébriquement soit par résolution d'un système d'équations linéaires. Nous préférons la résolution par les équations simultanées, car elle permet de développer le programme par l'ajout d'équations supplémentaires.

Les équations données ci-dessus correspondent à la brique, mais étant donné qu'il y a une succession de briques, on calcule les conditions de sortie à partir des conditions d'entrée.

Pour de l'air sec et pour de l'eau on écrit les équations suivantes

$$t_{f,1} = t_{f,0} + p_f / (q_f * c_{paf,0})$$

$$i_{f,1} = i_{f,0} + p_f / q_f$$

où:

.0 signifie condition à l'entrée

.1 signifie condition à la sortie

t_f = température de l'air froid °C

t_c = température de l'air chaud °C

q_f = débit massique du fluide kg/s

$c_{paf,0}$ = chaleur spécifique du fluide aux conditions d'entrée en J/(kg*K)

p_f = puissance de froid qui arrive à l'échangeur en W

Lorsqu'il s'agit d'air avec de la condensation on utilise l'enthalpie de l'air saturé à la température de la base (voir Annexe 2)

$$t_{f,1} = t_{f,0} + p_f * (t_{f,0} - t'_{bf}) / (q_f * (i_{f,0} - i_{t'.f}))$$

$$i_f.1 = i_f.0 + p_f / q_f$$

où: t_{bf} = température de la base

i_f = enthalpie de l'air saturé à la température de la base froide

5. LE TIROIR

La complexité du calcul est très différente s'il s'agit d'un gaz ou d'un liquide car leurs élévations de température sont très différentes.

Le débit massique d'eau à travers l'échangeur tubulaire correspondant à une brique est de l'ordre de 150g/s. Dans le cas de l'air, le débit massique est de l'ordre de 3 g/s.

A puissance thermique égale, les élévations de température sont inversement proportionnelles au produit des débits par les chaleurs spécifiques. Donc:

$$\text{cas de l'eau } (0,15 \text{ kg/s}) * (4180 \text{ J/kg}) = 627 \text{ J/s}$$

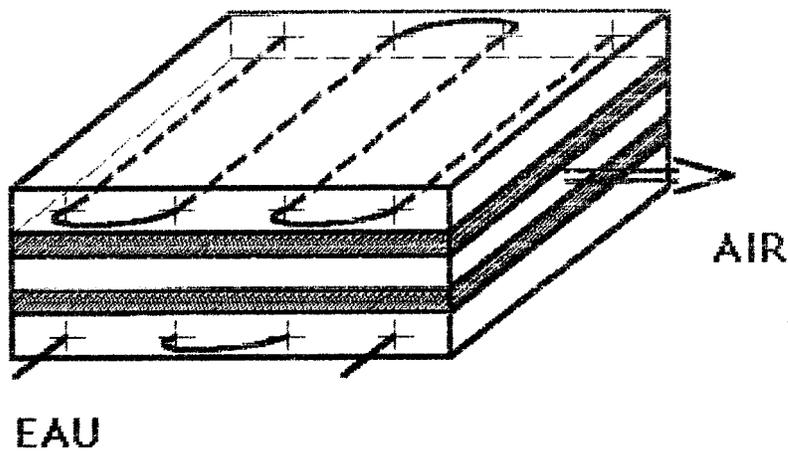
$$\text{cas de l'air } (0,003 \text{ kg/s}) * (1006 \text{ J/kg}) = 3$$

$$\frac{\text{élévation de température dans un échangeur à air}}{\text{élévation de température dans un échangeur à eau}} = 200$$

Par ailleurs les propriétés thermoélectriques de la matière thermoélectrique sont linéaires pour des gammes de température de 20°C.

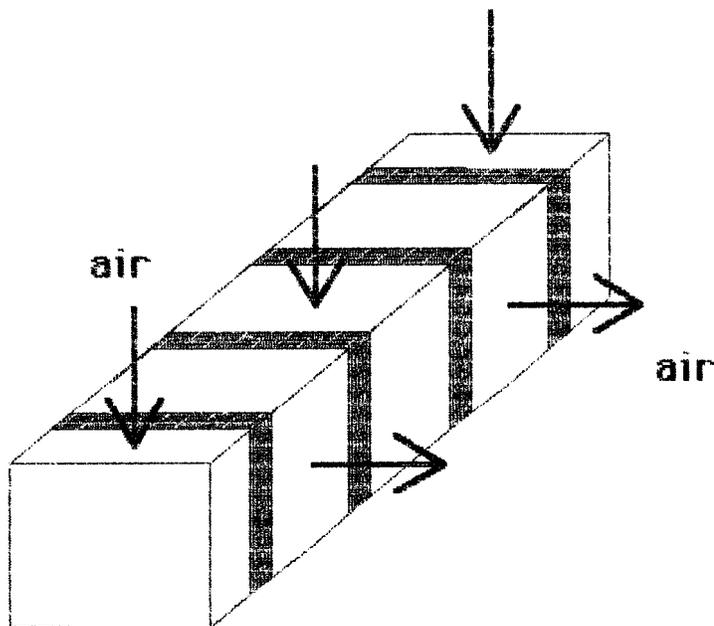
Par conséquent lorsqu'on a un tiroir eau-eau d'une puissance thermique de l'ordre de 2000 W comportant environ 500 briques en série sur les deux circuits d'eau, l'élévation de température de l'eau est de l'ordre de 3 °C. Il suffit de calculer les performances de la brique moyenne, c'est-à-dire la brique dont la température des fluides correspond à la température moyenne pour chacun des circuits. La puissance totale du tiroir est égale à la puissance de la brique fois le nombre de briques. En résumé on calcule une seule brique

Dans le cas d'un tiroir eau-air comportant en général environ 200 briques, il y a par exemple 50 briques en parallèle sur l'air et donc 4 en série sur l'eau. Ceci est schématisé à la page ci-après où les briques individuelles ne sont pas représentées. On voit que le tube d'eau passe 4 fois dans l'appareil, ce qui constitue 4 briques en série sur l'eau. Les bandes foncées représentent deux plans de pièces actives

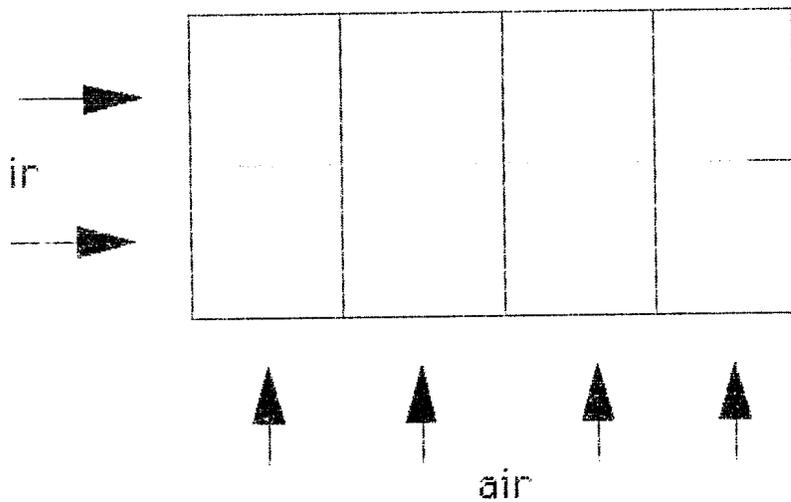


Toutes les briques sont en série sur le circuit d'eau. Le calcul est effectué par rangée de briques en parallèle sur le circuit d'air. On calcule la brique avec la température d'eau correspondant à la température moyenne de l'eau dans cette rangée de briques. En résumé dans ce cas on calcule 4 briques.

Un tiroir air-air est schématisé ci-dessous avec des écoulements gazeux croisés. Les bandes foncées représentent des plans de pièces actives.



Dans le cas d'un tiroir air-air il est nécessaire de calculer chaque brique lorsque les caractéristiques de l'air à l'entrée d'au moins un des circuits est différent. Dans l'exemple ci-dessous où figure un courant croisé, il est nécessaire de calculer les 8 briques.



En général nos tiroirs ont des courants croisés. A titre d'exemple le tiroir utilisé en ferroviaire comporte 10 plans de briques et dans chaque plan il y a 6*4 briques : 6 en série sur un circuit et 4 en série sur l'autre circuit. Il est nécessaire de calculer les 24 briques. On fait la somme des puissances respectives des briques et on multiplie par le nombre de plans de briques.

ARMOIRE

L'armoire est l'unité de base d'une installation. Les armoires sont toujours en parallèle sur les circuits fluides, elles ne sont jamais en série.

A l'intérieur d'une armoire on peut avoir les tiroirs dans un montage fluide série-parallèle. Donc lorsqu'on calcule une armoire le programme de calcul doit en tenir compte de la configuration série-parallèle des fluides.

PROGRAMMES DE CALCUL

Les calculs sont différents suivant le type de fluide. La technologie présentée du type assemblage de briques nécessite pour le cas eau-eau de calculer uniquement une brique mais lorsqu'il y a de l'air (ou un gaz) il faut calculer brique par brique.

Les programmes peuvent inclure les pertes de charge, et dans la plupart des programmes nous calculons la puissance frigorifique effective c'est-à-dire la puissance de froid calculée diminuée de la puissance hydraulique (réchauffement dû au frottement) car elle n'est pas négligeable.

7.1 Programmes thermoélectriques

Les programmes ont considérablement évolué depuis le programme en Fortran de 1973 pour un système air-air. Ensuite nous avons écrit les programmes en BASIC sur les petites machines Hewlett Packard de la série

85 et depuis quelques années nous écrivons en Pascal sur les machines Macintosh.

Nous constatons la nécessité de souvent modifier ces programmes. Généralement il s'agit de modifier les entrées et les sorties qui actuellement sont dans des procédures spécifiques donc relativement faciles à modifier. L'autre type de modification porte sur une donnée de sortie que l'on désire fixer à l'avance. Il faut rappeler que le premier paramètre que l'on varie est le courant électrique car lorsqu'il est fixé, les équations sont linéaires et très faciles à résoudre d'autant plus que nous constatons que nous pouvons toujours arranger l'ordre de nos équations simultanées de manière qu'il n'y ait pas de zéro sur la diagonale principale. Nous avons une procédure de convergence adaptée aux fonctions qui varient relativement linéairement et nous l'adaptions au paramètre du calcul. Les convergences pour conséquence d'augmenter la durée du calcul.

Lorsqu'il s'agit d'un calcul eau-eau, il n'y a pas de problème car nous calculons qu'une seule brique et la durée du calcul est de l'ordre de la minute; parcontre dans le cas où il faut calculer un multiple de 24 briques la durée du calcul peut dépasser 30 minutes.

7.2 Programmes sur des systèmes thermiques

Nous sommes conduits à intégrer nos programmes thermoélectriques dans une modélisation thermique de différents systèmes. Nous constatons de plus en plus qu'il faut optimiser tout un ensemble d'équipements et on ne peut pas étudier séparément le système thermoélectrique. Par exemple dans un système air-eau qui produit de l'eau froide pour refroidir de l'électronique, il faut modéliser le circuit d'utilisation ainsi que le circuit où les calories sont rejetées.

8. CONCLUSIONS

Le bilan énergétique d'un élément de matière thermoélectrique parcouru par un courant électrique, est représentée par trois équations.

La modélisation de systèmes thermoélectriques consiste à déterminer et à résoudre un système d'équations qui sont linéaires lorsque le courant électrique est pris comme paramètre. De tels modèles sont beaucoup plus simples que ceux des systèmes frigorifiques avec un fluide subissant un cycle de compression et détente.

MATERIAUX THERMOELECTRIQUES - TELLURURE DE BISMUTH

Nous donnons ci-dessous les caractéristiques à 27 °C d' un tellurure de bismuth dopé par le type N et le type P.

```
rhoN = 10.0892e-6;
rhoP = 10.2082e-6;
SeebTeN = 202.4205e-6;
SeebTeP = 195.468e-6;
CondThermTeN = 1.5801;
CondThermTeP = 1.5242;
```

Pour le matériau moyen nous avons:

```
rho27 = (rhoP + rhoN) / 2;
SeebTe27 = (SeebTeP + SeebTeN) / 2;
CondThermTe27 = (CondThermTeP + CondThermTeN) / 2;
```

Ces caractéristiques sont fonction de la température moyenne t du matériau thermoélectrique, nous donnons ces fonctions ci-dessous

```
rho = rho27 * (1 + 0.00472 * (t - 27) + 3.6e-6 * sqrt(t - 27));
seebTe := SeebTe27 * (1 + 0.001428 * (t - 27));
condThermTe := condThermTe27 * (1 - 0.001599 * (t - 27) +
4.066e-6 * (t - 27)^2);
z := sqrt(SeebTe27) / rstvEITe27 / condThermTe27;
```

Annexe 2

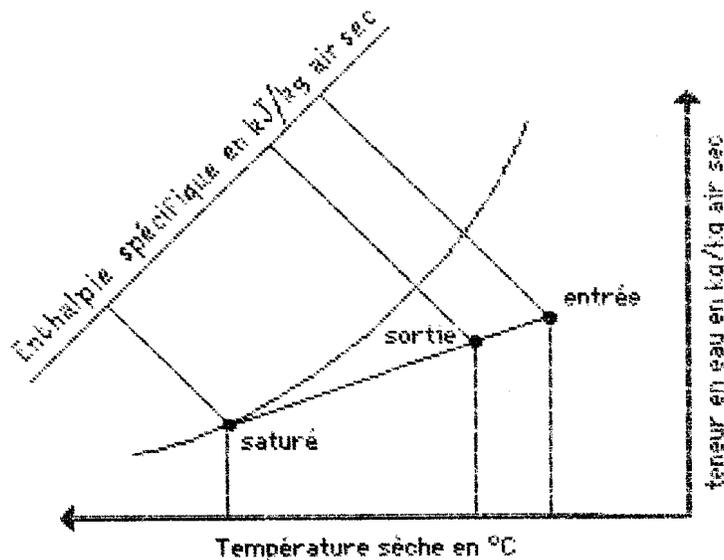
Coefficient d' échange avec condensation

Dans un échangeur thermoélectrique en mode réfrigération la température de la base est inférieure à la température des ailettes. Nous admettons que l' air sortant d' un échangeur associé à une brique est un mélange entre:

- air saturé en contact avec la base froide. Cet air saturé est à la température de la base froide t_{bf} température à laquelle il correspond une enthalpie de l'air (saturé) it_f .

- air entrant dans cet échangeur associé à une brique ayant une température t_{f0} et une enthalpie $if0$.

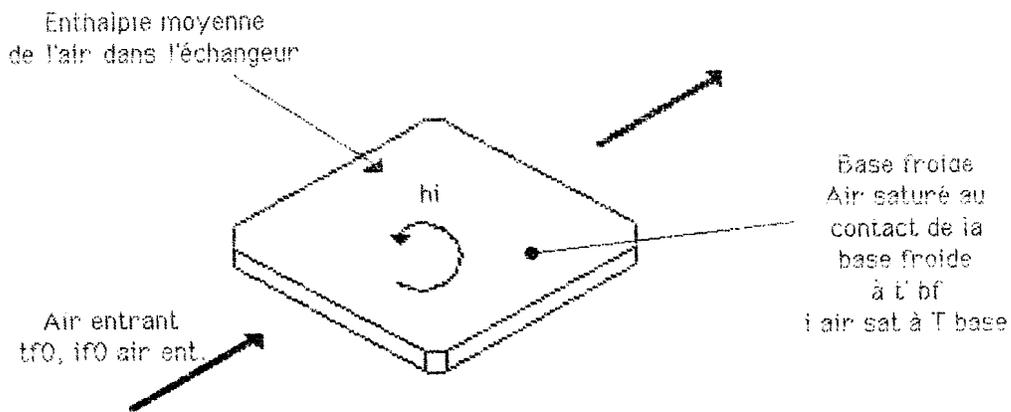
Le schéma ci-dessous permet de visualiser le mécanisme physique.



Pour un échangeur élémentaire, nous connaissons les conditions à l' entrée t_{f0} et $if0$ ainsi que t_{bf} et pf car à un t_{bf} correspond une puissance frigorifique d' origine thermoélectrique. or:

$$if1 = if0 + pf$$

Le graphique à la page suivante permet de visualiser le calcul.



Nous connaissons t_{f0} et i_{f0} donc le point " entrée "

Nous connaissons t'_{bf} et i'_{f} donc le point " saturé "

Nous connaissons i_{f1}

Donc par la règle des droites parallèles nous pouvons écrire

$$\frac{t_{f0} - t'_{bf}}{i_{f0} - i'_{f}} = \frac{t_{f1} - t_{f0}}{i_{f1} - i_{f0}}$$

Où:

$$t_{f1} = t_{f0} + \frac{(i_{f1} - i_{f0}) * (t_{f0} - t'_{bf})}{i_{f0} - i'_{f}}$$

Ainsi nous avons calculé la température de l'air humide à la sortie de l'échangeur correspondant à la brique et connaissant déjà son enthalpie i_{f1} nous connaissons les conditions d'entrée de l'air humide dans l'échangeur de la brique suivante.